47th **I**nternational **M**athematical **O**lympiad

Slovenia 2006

12 juillet 2006

Problème 1. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Un point P intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

Problème 2. Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de P est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P. Les côtés de P sont aussi appelés *bons*.
On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P.
Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

Problème 3. Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$|ab\,(a^2 - b^2) + bc\,(b^2 - c^2) + ca\,(c^2 - a^2)| \leqslant M\,(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels a, b et c.

Temps accordé : 4 heures et demie
Chaque problème vaut 7 points

13 juillet 2006

Problème 4. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problème 5. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers, de degré $n > 1$ et k un entier strictement positif. On considère le polynôme $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, dans lequel P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Problème 6. A tout côté b d'un polygone convexe P on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans P et ayant b comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de P est au moins le double de l'aire de P.

Temps accordé : 4 heures et demie
Chaque problème vaut 7 points